13

by Fitri Aryani

PENYELESAIAN PERSAMAAN POLINOMIAL KUARTIK MENGGUNAKAN MATRIKS *CIRCULANT*

FITRI ARYANI[1], IVAN FADILLAH[2]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Ermail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: ivanfadilaputra007@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian pesamaan polinomial menggunakan matriks *circulant*. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui nilai akar-akar dari persamaan polinomial kuartik yang diperoleh dari nilai eigen pada matriks *circulant*. Selanjutnya dalam memperoleh nilai eigen matriks *circulant* diperlukan mengetahui akar-akar pangkat $\text{ke}-n$ dari nilai akar-akar satuan. Hasil dari penelitian ini diketahui bahwa bentuk umum dari akar-akar penyelesaian persamaan polinomial kuartik berdasarkan nilai eigen matriks *circulant* adalah $a+b+c+d$, $a-b+c-d$, $a-c+i(b-d)$, dan $a-c-i(b-d)$.

Kata kunci: Matriks *Circulant*,Nilai eigen, Nilai akar-akar, Persamaan Polinomial, Polinomial kuartik

ABSTRACT

This study discuss about solving polynomial equations using circulant matrices. The goal of this study is to knowing about the roots of quartic equation. And then the procedure to get the roots of polynomial equations using circulant matrices is will find from eigen values of circulant matrices. The result of this study is get the genereal roots of equations quartic is $a+b+c+d$, $a-b+c-d$, $a-c+i(b-d)$, *dan* $a-c-i(b-d)$.

Keywords: *Circulant matrices,The roots of equtions, Eigen values, Polynomial equations, Polynomial quartic*

1. Pendahuluan

Persamaan polinomial merupakan suatu persamaan dalam matematika yang melibatkan variabel berpangkat satu atau lebih dengan koefisiennya dalam operasi penjumlahan, perkalian, dan pemangkatan. Pada persamaan polinomial, variabel dengan pangkat tertinggi menunjukkan orde dari persamaan polinomial, dan banyaknya akar-akar polinomial dapat sebanyak orde pada polinomial tersebut. Adapun bentuk umum dari persamaan polinomial adalah seperti berikut:

$$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0$$

dengan x merupakan variabel fungsi polinomial dan α merupakan koefisien dari x yang bersangkutan.

Matriks circulant merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen baris ke-i untuk $i = 2, 3, \ldots n$ diperoleh dengan cara menggeser elemen-elemen baris pertama ke arah kanan sebanyak $i-1$ langkah. Dan entri diagonal matriksnya adalah konstan (tetap). Adapun bentuk umum matriks *circulant* adalah sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk umum matriks *circulant* tersebut, dapat diperoleh suatu persamaan polinomial q dari baris pertama matriks *circulant* yang berbentuk seperti berikut:

$$q(t) = c_1 + c_2 t + \cdots + c_n t^{n-1} \tag{1}$$

Seperti halnya matriks biasa, matriks *circulant* juga mempunyai nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dari matriks *circulant* dapat dicari dengan mensubtitusikan akar-akar pangkat ke-n dari satuan ke Persamaan (2.3), sehingga dapat ditulis kembali bahwa $q(t) = \lambda$.

Terdapat hubungan antara persamaan polinomial dengan persamaan yang diperoleh dari matriks *circulant* pada (2).

2. Bahan dan Metode Penelitian

Penarikan Akar-Akar Pangkat Ke $-n$ Dari Satuan

Nilai akar-akar pangkat ke-n dari satuan pada matriks *circulant* adalah $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$, dengan $\omega^0 = 1$. Nilai ω dapat dicari seperti berikut:

$$\omega = e^{2\pi i/n} \tag{2}$$

Selain menggunakan Persamaan (2), akar-akar pangkat ke-n dari satuan dapat diperoleh dengan cara mencari nilai akar dari persamaan berikut:

$$x^n - 1 = 0 \tag{3}$$

Penyelesaian Persamaan Polinomial Menggunakan Matriks *Circulant*

2.1 Polinomial Kuadratik

Diberikan persamaan umum polinomial kuadratik sebagai berikut:

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta = 0 \tag{4}$$

Karena persamaan polinomial yang akan diselesaikan merupakan polinomial kuadratik, maka matriks *circulant* yang akan digunakan berukuran 2×2 seperti berikut:

$$C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai a dan b dapat dicari dengan mengidentikkan Persamaan (4) dengan persamaan karakteristik C. Maka terlebih dahulu akan dicari persamaan karakteristik matriks *circulant*:

$$\det(xI - C) = \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right)$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

Karena $\det(xI - C) = 0$, maka diperoleh persamaaan karakteristik C sebagai berikut:

$$0 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2 \tag{5}$$

Kemudian dengan mengidentikkan Persamaan (4) denganPersamaan (5):

$$x^2 + \alpha x + \beta = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

maka diperoleh:

$$a = -\frac{1}{2}\alpha \tag{6}$$

dan,

$$b = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta} \tag{7}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan Persamaan (6) dan (7) ke bentuk umum matriks *circulant*, maka diperoleh matriks *circulant* untuk persamaan kuadratik sebagai berikut:

$$C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -\alpha/2 & \sqrt{\alpha^2/4 - \beta} \\ \sqrt{\alpha^2/4 - \beta} & -\alpha/2 \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan polinomial kuadratik pada baris pertama matriks *circulant* adalah:

$$q(t) = \frac{-\alpha}{2} + t\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \tag{8}$$

Selanjutnya dicari akar-akar pangkat ke-n dari satuan untuk $n = 2$ dengan menggunakan Persamaan (2) sehingga diperoleh $\omega^0 = 1$ dan $\omega = 1$. Kemudian substitusi masing-masing nilai ω^0 dan ω ke Persamaan (8), sehingga diperoleh:

$$q(1) = \frac{-\alpha}{2} + \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}\right) \tag{9}$$

$$q(-1) = \frac{-\alpha}{2} - \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}\right) \tag{10}$$

Maka nilai yang diperoleh dari Persamaan (9) dan (10) inilah yang merupakan nilai eigen dari matriks *circulant* dan sekaligus merupakan nilai akar-akar penyelesaian dari persamaan polinomial kuadratik.

2.2 Polinomial Kubik

Diberikan persamaan umum polinomial kubik sebagai berikut:

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{11}$$

Sama halnya dengan persamaan kuadratik, karena persamaan polinomial yang akan diselesaikan merupakan polinomial kubik, maka matriks *circulant* yang akan digunakan berukuran 3×3 seperti berikut:

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai a, b dan c dapat dicari dengan mengidentikkan Persamaan (11) dengan persamaan karakteristik C. Maka terlebih dahulu akan dicari persamaan karakteristik matriks *circulant*:

$$\det(xI - C) = \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}\right)$$

$$= x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 3bc)x + 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

Karena $\det(xI - C) = 0$, maka diperoleh persamaaan karakteristik C sebagai berikut:

$$0 = x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 3bc)x + 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \tag{12}$$

Kemudian dengan mengidentikkan Persamaan (11) dengan Persamaan (12),

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 3bc)x + 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

maka diperoleh:

$$a = -\frac{1}{3}\alpha \tag{13}$$

dan

$$3a^2 - 3bc = \beta$$

$$bc = \frac{\alpha^2 - 3\beta}{9} \tag{14}$$

dan

$$3abc - a^3 - b^3 - c^3 = \gamma$$

$$b^3 + c^3 = \frac{-2\alpha^3 + 9\alpha\beta - 27\gamma}{27} \tag{15}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh nilai b dan c, maka akan dibentuk persamaan kuadrat baru dari Persamaan (14) dan (15) dengan nilai akar-akar b^3 dan c^3 seperti berikut:

$$x^2 - (b^3 + c^3)x + b^3c^3 = 0$$

$$x^2 - (b^3 + c^3)x + (bc)^3 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right)x + \left(\frac{\alpha^2 - 3\beta}{9}\right)^3 = 0 \tag{16}$$

Berdasarkan Persamaan (16), maka dapat dicari nilai akar-akarnya dengan menggunakan rumus abc sehingga diperoleh:

$$b = \sqrt[3]{\frac{-\left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right) + \sqrt{\left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha^2 - 3\beta}{9}\right)^3}}{2}} \tag{17}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{-\left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right) - \sqrt{\left(\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha^2 - 3\beta}{9}\right)^3}}{2}} \tag{18}$$

Setelah mengetahui nilai a, b dan c menggunakan Persamaan (13), (17) dan (18), maka dapat dibentuk kembali matriks *circulant* tersebut:

$$C_{3\times3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Berdasarkan baris pertama matriks *circulant*, dapat dibentuk persamaan polinomial $q(t)$ sebagai berikut:

$$q(t) = a + bt + ct^2 \tag{19}$$

Selanjutnya dicari akar-akar pangkat ke-n dari satuan untuk $n = 2$ dengan menggunakan Persamaan (2) sehingga diperoleh $\omega^0 = 1$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ dan $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Kemudian substitusi masing-masing nilai ω^0, ω dan ω^2 ke Persamaan (19), sehingga diperoleh:

$$q(1) = a + b + c \tag{20}$$

$$q\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = a + b\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \tag{21}$$

$$q\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = a + b\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \tag{22}$$

Karena nilai eigen dari matriks circulant merupakan nilai akar-akar dari persamaan polinomial, maka nilai yang diperoleh dari Persamaan (20), (21), dan (22) inilah yang merupakan nilai akar-akar penyelesaian dari persamaan polinomial kubik.

3. Hasil dan Pembahasan

Penyelesaian Persamaan Polinomial Kuartik Menggunakan Matriks *Circulant*

Diberikan persamaan umum polinomial kuartik sebagai berikut:

$$p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 \tag{23}$$

Karena persamaan polinomialyang akan diselesaikan merupakan polinomial kuartik, maka matriks *circulant* yang akan digunakan berukuran 4×4 seperti berikut:

$$C_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai a, b, c, dan d, maka akan diidentikkan Persamaan (23) dengan persamaan karakteristik C. Namun sebelumnya, terlebih dahulu akan dicari persamaan karakteristik matriks *circulant* sebagai berikut:

$$\det(xI - C) = \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix} \right)$$

$$= x^4 - 4ax^3 + (6a^2 - 4bd - 2c^2)x^2 + (-4a^3 + 8abd + 4ac^2 - 4b^2c - 4cd^2)x$$
$$+ a^4 - 4a^2bd - 2a^2c^2 + 4ab^2c + 4acd^2 - b^4 + c^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2$$

Karena $\det(xI - C) = 0$, maka diperoleh persamaaan karakteristik C sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0 = {} & x^4 - 4ax^3 + (6a^2 - 4bd - 2c^2)x^2 + (-4a^3 + 8abd + 4ac^2 - 4b^2c - 4cd^2)x \\ & + a^4 - 4a^2bd - 2a^2c^2 + 4ab^2c + 4acd^2 - b^4 + c^4 - d^4 - 4bc^2d + 2b^2d^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Kemudian dengan mengidentikkan Persamaan (23) dengan Persamaan (24), sehingga diperoleh:

$$a = -\frac{1}{4}\alpha \tag{25}$$

$$\beta = 6a^2 - 4bd - 2c^2 \tag{26}$$

Selanjutnya untuk memperoleh persamaan yang dibutuhkan akan disubstitusikan nilai pada Persamaan (25) ke Persamaan (26), sehingga:

$$\beta = 6a^2 - 4bd - 2c^2$$

$$bd = \frac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32} \tag{27}$$

Selanjutnya yang akan diidentikkan adalah:

$$\gamma = -4a^3 + 8abd + 4ac^2 - 4b^2c - 4cd^2 \tag{28}$$

Untuk memperoleh persamaan yang dibutuhkan, maka akan disubstitusikan nilai pada Persamaan (25), (26), dan (27) ke Persamaan (28), sehingga:

$$\gamma = -4a^3 + 8abd + 4ac^2 - 4b^2c - 4cd^2$$

$$b^2 + d^2 = \frac{-\alpha^3 + 4\alpha\beta - 8\gamma}{32c} \tag{29}$$

Karena Persamaan (29) masih memiliki nilai c yang belum diketahui persamaannya, maka untuk mengetahui persamaannya akan diidentikkan penyelesaian yang keempat pada Persamaan (23) dengan Persamaan (24) sebagai berikut:

$$\delta = a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 4a^2bd - 2a^2c^2 + 4ab^2c + 4acd^2 - 4bc^2d + 2b^2d^2$$

$$\delta = c^4 - 2a^2c^2 + a^4 - 4a^2bd - 4c^2bd + 4ac(b^2 + d^2) + 4(bd)^2 - (b^2 + d^2)^2 \tag{30}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi Persamaan (25), (27), dan (29) ke Persamaan (30), sehingga diperoleh:

$$\delta = a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 4a^2bd - 2a^2c^2 + 4ab^2c + 4acd^2 - 4bc^2d + 2b^2d^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4096c^6 - 256c^4(3\alpha^2 - 8\beta) + 16c^2(3\alpha^4 - 16\alpha^2\beta + 16\beta^2 + 16\alpha\gamma - 64\delta) \\ &\quad - \left(-\alpha^3 + 4\alpha\beta - 8\gamma\right)^2 \end{aligned} \tag{31}$$

Setelah diperoleh Persamaan (31), maka untuk mendapatkan nilai c dapat menggunakan metode horner atau menggunakan program maple. Karena Persamaan (31) merupakan persamaan berorde 6, maka nilai c yang akan diperoleh adalah sebanyak 6 buah. Namun walaupun begitu, dapat dipilih salah satunya saja dari beberapa nilai c yang telah diperoleh, karena setiap matriks *circulant* yang dibentuk dengan nilai c yang berbeda, akan menghasilkan nilai eigen yang sama.

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai b dan d, maka akan dibentuk persamaan kuadrat baru dengan akar-akar b^2 dan d^2 menggunakan Persamaan (27) dan (29) sebagai berikut:

$$x^2-(b^2+d^2)x+(b^2d^2)=0$$

$$x^2-(b^2+d^2)x+(bd)^2=0$$

$$x^2+\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{32c}\right)x+\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)^2=0 \qquad (32)$$

Berdasarkan Persamaan (32), maka dapat dicari nilai akar-akarnya dengan menggunakan rumus abc sehingga diperoleh:

$$b=\sqrt{\frac{-\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{32c}\right)+\sqrt{\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{32c}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)^2}}{2}} \qquad (33)$$

dan

$$d=\sqrt{\frac{-\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{32c}\right)-\sqrt{\left(\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{32c}\right)^2-4\left(\frac{3\alpha^2-8\beta-16c^2}{32}\right)^2}}{2}} \qquad (34)$$

Setelah mengetahui nilai a, b, c, dan d menggunakan Persamaan (25), (33), (31) dan (34) maka dapat dibentuk kembali matriks *circulant* tersebut:

$$C_{4\times4}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

Selanjutnya berdasarkan matriks C yang telah diketahui nilai a, b, c, dan d, maka dapat dibentuk persamaan polinomial $q(t)$ sebagai berikut:

$$q(t)=a+bt+ct^2+dt^3 \qquad (35)$$

Kemudian untuk mengetahui nilai $q(t)$, maka substitusi nilai akar-akar pangkat ke - n dari satuan dengan $n=4$ ke Persamaan (35), sehingga diperoleh:

$$q(1)=a+b+c+d \qquad (36)$$

$$q(-1)=a-b+c-d \qquad (37)$$

$$q(i)=a-c+i(b-d) \qquad (38)$$

$$q(-i)=a-c-i(b-d) \qquad (39)$$

Karena nilai eigen dari matriks *circulant* merupakan nilai akar-akar dari persamaan polinomial, maka nilai yang diperoleh dari Persamaan (36), (37), (38), dan (39) inilah yang merupakan nilai akar-akar penyelesaian dari persamaan polinomial kuartik.

4. Kesimpulan

1. Matriks *circulant* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan polinomial kuartik adalah:

$$C_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

2. Persamaan yang digunakan untuk memperoleh entri-entri pada matriks C adalah:

$$a = -\frac{1}{4}\alpha$$

dan,

$$b = \sqrt{\frac{-\left(\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{32c}\right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{32c}\right)^2 - 4\left(\frac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32}\right)^2}}{2}}$$

dan,

$$d = \sqrt{\frac{-\left(\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{32c}\right) - \sqrt{\left(\frac{\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{32c}\right)^2 - 4\left(\frac{3\alpha^2 - 8\beta - 16c^2}{32}\right)^2}}{2}}$$

Berbeda dari nilai a, b, dan d, nilai c diperoleh dengan menggunakan program maple atau menggunakan metode horner pada Persamaan [31] berikut:

$$0 = 4096c^6 - 256c^4(3\alpha^2 - 8\beta) + 16c^2(3\alpha^4 - 16\alpha^2\beta + 16\beta^2 + 16\alpha\gamma - 64\delta) - \left(-\alpha^3 + 4\alpha\beta - 8\gamma\right)^2$$

3. Akar-akar penyelesaian dari persamaan polinomial kuartik adalah:

$$q(1) = a + b + c + d$$
$$q(-1) = a - b + c - d$$
$$q(i) = a - c + i(b - d)$$
$$q(-i) = a - c - i(b - d)$$

Daftar Pustaka

[1] Aini, Qudrotul, dan Utami, Meinarini Catur. "*Aljabar Linier Dasar*".Alfabeta.Bandung. 2013

[2] Anton, Howard."*Aljabar Linier Elementer*". Edisi Kelima. Erlangga. Jakarta. 1997

[3] Budi, Wono Setya."*Alajabar Linier*".PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta. 1995

[4] Gazali, Wikaria."*Matriks dan Transformasi Linier*".Graha Ilmu,Yogyakarta. 2005

[5] Hadley, G., "*Aljabar Linier*".Edisi Revisi.Erlangga, Jakarta. 1992

[6] Kalman, Dan, dan E. White, James, "Polynomial Equations and Circulant Matrices",

the *Mathematical Association of America*, hal 821-828, 2001

[7] Kartono. "*Aljabar Linier, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple*".Edisi Kedua. Graha Ilmu, Yogyakarta. 2005

[8] Mursita, Danang."*Aljabar Linier*".Rekayasa Sains, Bandung. 2010

[9] Yurniati."Menyelesaikan Persamaan Polinomial dengan Matriks Circulant", *Jurnal Matematika UNAND*.Vol. 1, No. 1, hal 23-27, 2012

13

ORIGINALITY REPORT

15%	15%	9%	6%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	documents.mx Internet Source	4%
2	ejournal.uin-suska.ac.id Internet Source	2%
3	www.gym.gymnastics.org.au Internet Source	1%
4	staff.uny.ac.id Internet Source	1%
5	grail.csuohio.edu Internet Source	1%
6	www.scribd.com Internet Source	1%
7	docplayer.info Internet Source	1%
8	www.actapress.com Internet Source	1%
9	www.mapleprimes.com Internet Source	<1%

10	www.free-tabs.com Internet Source	<1 %
11	www1.math.american.edu Internet Source	<1 %
12	www.ascom.to.it Internet Source	<1 %
13	fs.gallup.unm.edu Internet Source	<1 %
14	thesis.library.caltech.edu Internet Source	<1 %
15	Belkacem Said-Houari. "Linear Algebra", Springer Nature, 2017 Publication	<1 %
16	grahailmu.co.id Internet Source	<1 %
17	hkumath.hku.hk Internet Source	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		